

TRAITÉ DE GRAVITÉ ET DE GRAVITOMAGNÉTISME

Avant propos

Ce rapport a pour but de faire connaître d'une manière aussi simple que possible le gravitomagnétisme à ceux qui s'intéressent à ce phénomène au point de vue physique analytique et quantitative. Dans l'intérêt de clarté il m'a paru inévitable de me répéter souvent sans me soucier de donner à mon exposé une forme élégante. Je ne crois pas avoir caché au lecteur les difficultés inhérentes au sujet, surtout la détectabilité des ondes gravitomagnétiques. J'ai pu, par contre, unifier les lois régissant la gravité et l'électricité, afin que le lecteur qui n'est pas bien familiarisé avec le fondement empirique de l'unicité de ces deux phénomènes ne se trouve dans une situation semblable à celle d'un surfeur que les vagues empêcheraient de voir la mer.

Joseph Wathuta NDURIRI , 31 octobre 2005

josephwathutanduriri@gmail.com

Tél : +33(0)6-29-25-96-23

Ingénieur diplômé de :

Ecole Nationale de l'Aviation Civile – Toulouse France

- option radar hyperfréquence.

Institut National des Sciences Appliquées – Toulouse France

- option électronique et

informatique industrielle.

Institut Universitaire de Technologie - Toulon en

- option électronique et

informatique industrielle.

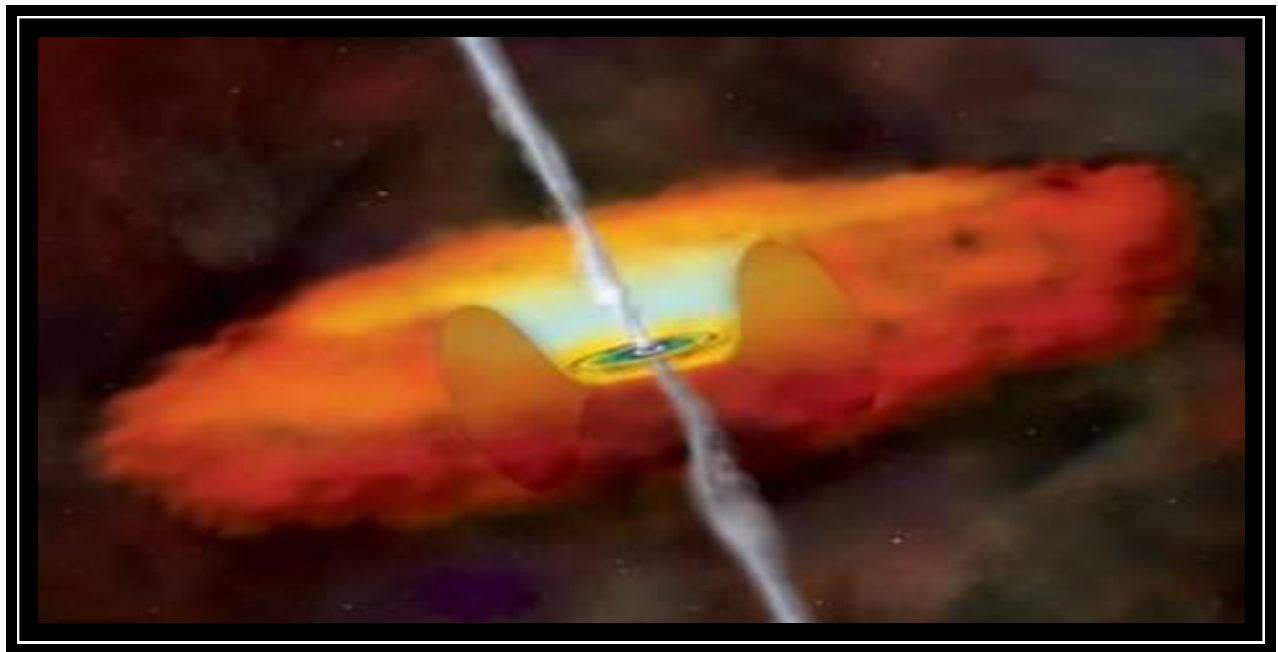




Table des matières

APPROCHE

Objectif
Hypothèse
Méthode

EXISTENCE DU CHAMP MAGNETIQUE

Conducteur électrique de longueur infinie

EXISTENCE DU CHAMP GRAVITOMAGNETIQUE

Conducteur massique de longueur infinie
Force attractive gravitomagnétique
Force répulsive gravitomagnétique
Lien entre le champ magnétique et gravitomagnétique
Spire circulaire massique en rotation
Disque massique en rotation
Effet du champ gravitomagnétique sur la forme des galaxies
Jets bipolaires des matières
Aspiration spirale des matières
Sphère pleine en rotation
Champ gravitomagnétique aux pôles terrestres
Particule massique et chargée

ONDES GRAVITOMAGNETIQUES

Electromagnétisme et gravitomagnétisme
Induction gravitomagnétique

ENERGIE ELECTROGRAVITOMAGNETIQUE

Equation fondamentale électrogravitomagnétique

Constantes physiques
Grandeurs Physiques

RETARD SPATIO-TEMPOREL ET EFFET DOPPLER

APPROCHE

Objectif

Mettre en évidence l'existence du champ gravitomagnétique, tout au long de cet exposé, on ne proposera aucune théorie, on n'utilisera que les outils mathématiques acceptés et expérimentés par la communauté scientifique.

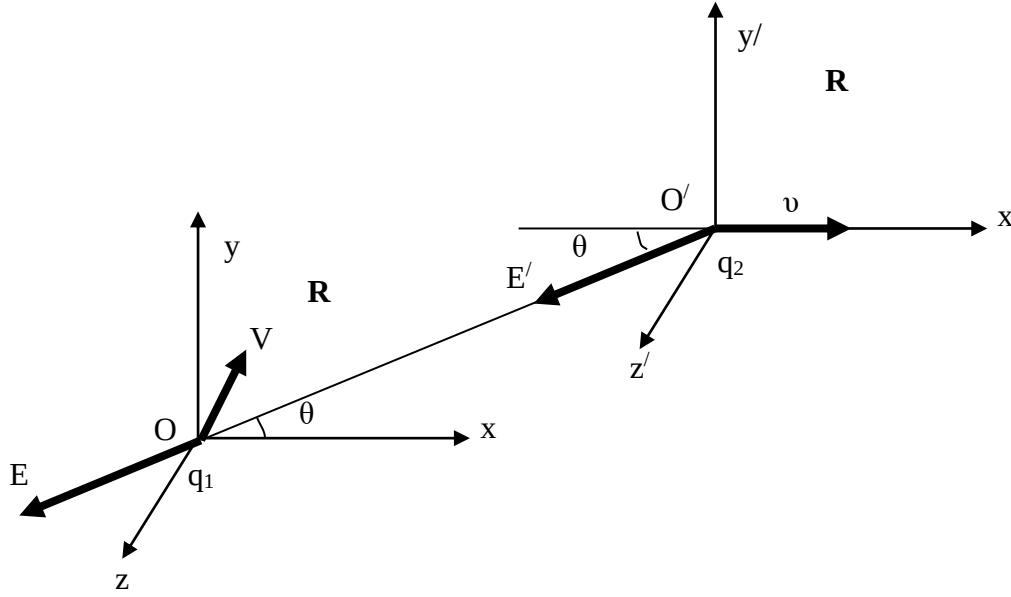
Hypothèse

L'interaction gravitationnelle se propage à une vitesse finie c dans le vide, on admet que cette vitesse c est égale à la vitesse de la lumière.

Méthode

En vertu du principe de transformation des forces d'un référentiel à un autre, on va appliquer la transformation de Lorentz sur le champ électrique pour mettre en évidence l'existence du champ magnétique. Analogiquement, on va appliquer la même transformation de Lorentz sur le champ gravitationnel pour mettre en évidence l'existence du champ gravitomagnétique. En fin, on va démontrer que la lumière est composée des ondes électromagnétiques et des ondes gravitomagnétiques. On appellera cette onde, c'est-à-dire la lumière, onde électrogravitomagnétique.

EXISTENCE DU CHAMP MAGNETIQUE



On considère un référentiel R' en translation suivant l'axe Ox à la vitesse v par rapport au référentiel R . Soit q_2 une charge au repos dans le référentiel R' , par conséquent cette charge q_2 se déplace aussi à la vitesse v par rapport au référentiel R . Calculons la force que la charge q_2 exerce sur la charge q_1 , celle-ci se déplaçant à la vitesse V par rapport au référentiel R .

E' dénote le champ électrique engendré par q_2 par rapport au référentiel R' dans l'espace à une distance radiale r donnée, E dénote le champ électrique engendré par q_2 par rapport au référentiel R dans l'espace à une distance radiale r donnée. Les plans yOx et $y'O'x'$ sont dans le même plan et Ox et $O'x'$ sont parallèles.

On va déterminer la force exercée par la charge q_2 sur la charge q_1 par rapport au référentiel R . L'application de la transformation de Lorentz sur une force permet de savoir comment une force se transforme d'un référentiel R' au référentiel R à partir des relations suivantes.

$$F_x = \frac{1}{(1 + \frac{\beta V'_x}{c})} (F'_x + \beta \frac{F'_y V'_x}{c})$$

$$F_y = \frac{1}{\gamma(1 + \frac{\beta V'_x}{c})} F'_y$$

$$F_z = \frac{1}{\gamma(1 + \frac{\beta V'_x}{c})} F'_z$$

Avec ;

$$V'_x = \frac{(V_x - v)}{(1 - \beta \frac{V_x}{c})}$$

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma(1 - \beta \frac{V_x}{c})}$$

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma(1 - \beta \frac{V_x}{c})}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

c est la vitesse de la lumière

$$v \geq 0$$

On en déduit que

$$F_x = q_1 E'_x + \frac{\gamma \beta q_1 (E'_y V_y + E'_z V_z)}{c}$$

$$F_y = \gamma q_1 E'_y - \frac{\gamma \beta q_1 E'_y V_x}{c}$$

$$F_z = \gamma q_1 E'_z - \frac{\gamma \beta q_1 E'_z V_x}{c}$$

Pour simplifier la démonstration la vitesse V se trouve dans le plan $y'O'x'$.

$\Rightarrow$

$$V_z = 0 \text{ et } E_z = 0$$

Les équations précédentes se simplifient :

$$F_x = q_1 E'_x + \frac{\gamma \beta q_1 E'_y V_y}{c}$$

$$F_y = \gamma q_1 E'_y - \frac{\gamma \beta q_1 E'_y V_x}{c}$$

Pour montrer la validité de ces deux équations précédentes, on va déterminer la force exercée, sur q_1 se déplaçant à la V par rapport au référentiel R, par un conducteur neutre et rectiligne parallèle à l'axe Ox, parcouru par un courant électrique I_2 .

Ce conducteur sera constitué des charges positives immobiles par rapport au référentiel R et par des charges négatives se déplaçant à la vitesse v suivant l'axe Ox par rapport au référentiel R, mais au repos par rapport au référentiel R' .

On note la pseudo norme du vecteur à 4 dimensions ou quadrivecteur :
 $r^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = r'^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2$ où $\mathbf{r}^2$ et $\mathbf{r}'^2$ sont des vecteurs sur le radial reliant q_1 et q_2 , r étant la distance entre la charge q_1 et q_2 . Cette quantité $r^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2$ ne dépend pas du référentiel et constitue un invariant.

En vertu de l'invariance de cette quantité ;

Soit $k = 1/4\pi\epsilon_0$, ϵ_0 étant la permittivité du champ électrique dans le vide.

$$E'_x = - \frac{kq_2 \cos(\theta)}{r^2}$$

$$E'_y = - \frac{kq_2 \sin(\theta)}{r^2}$$

$$F_x = - \frac{kq_1q_2 \cos(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma\beta kq_1q_2 \sin(\theta)V_y}{r^2c}$$

$$F_y = - \frac{\gamma kq_1q_2 \sin(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma\beta kq_1q_2 \sin(\theta)V_x}{r^2c}$$

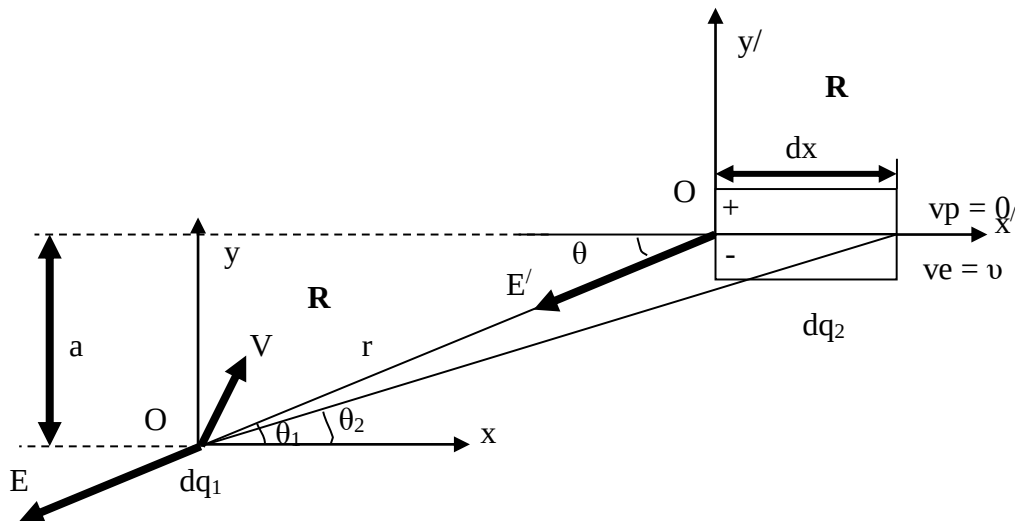
Equations fondamentales

Si $c = \infty$, on retrouve les équations de l'électrostatique, soit ;

$$F_x = - \frac{kq_1q_2 \cos(\theta)}{r^2}$$

$$F_y = - \frac{kq_1q_2 \sin(\theta)}{r^2}$$

Application



1) On va déterminer la force due à la charge positive dq_2 sur dq_1 . Comme le référentiel R' associé à la charge positive est au repos par rapport au référentiel R , $dq_2 > 0$:

$$v_p = 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ et } \gamma = 1$$

$\Rightarrow$

$$dF_{xp} = - \frac{k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot \cos(\theta)}{r^2}$$

$$dF_{yp} = - \frac{k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot \sin(\theta)}{r^2}$$

2) On va déterminer la force due à la charge négative dq_2 sur dq_1 . Comme le référentiel R' associé à la charge négative se déplace à la vitesse v par rapport au référentiel R , $v_e = v$ et $dq_2 < 0$.

$$dF_{xe} = + \frac{k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma \beta k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta) V_y}{r^2 c}$$

$$dF_{ye} = + \frac{\gamma k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma \beta k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta) V_x}{r^2 c}$$

Supposons que le système soit linéaire :

$$dF_x = dF_{xp} + dF_{xe}$$

Et

$$dF_y = dF_{yp} + dF_{ye}$$

⇒

$$dF_x = 0 + \frac{\gamma \beta k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta) V_y}{r^2 c}$$

$$dF_y = \frac{(\gamma - 1) k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma \beta k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta) V_x}{r^2 c}$$

Equations fondamentales pour un conducteur neutre

mais $\beta = \frac{v}{c}$,

$$dF_x = + \frac{\gamma \cdot k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot v \sin(\theta) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = + \frac{(\gamma - 1) k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma \cdot k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot v \sin(\theta) V_x}{r^2 c^2}$$

Mais

$$v = \frac{dx}{dt}$$

v est la vitesse de la charge.

$$dq_2 v = dq_2 \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dq_2 dx}{dt} = I_2 dx, \text{ où est } I_2 = \text{le courant électrique}$$

En remplaçant $dq_2 v$ dans les fonctions dF_x et dF_y , on a ;

$$dF_x = + \frac{\gamma \cdot k \cdot dq_1 \cdot I_2 dx \sin(\theta) V_y}{r^2 c^2}$$

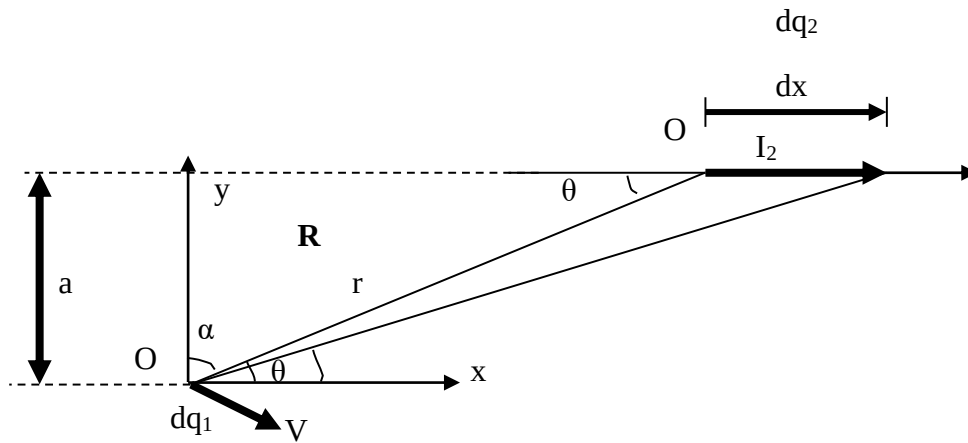
$$dF_y = + \frac{(\gamma - 1) k \cdot dq_1 \cdot dq_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma \cdot k \cdot dq_1 \cdot I_2 dx \sin(\theta) V_x}{r^2 c^2}$$

Si $v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1$, on a

$$dF_x = + \frac{k \cdot dq_1 \cdot I_2 dx \sin(\theta) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = - \frac{k \cdot dq_1 \cdot I_2 dx \sin(\theta) V_x}{r^2 c^2}$$

Changement de variable si $\theta = \pi/2 - \alpha$, θ varie de π à 0 et α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, comme le montre le schéma suivant.



$$dF_x = + \frac{k dq_1 I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = - \frac{k dq_1 I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{r^2 c^2}$$

Mais

$k = 1/4\pi\epsilon_0$, ϵ_0 étant la permittivité du champ électrique, soit μ_0 une variable muette tel que ;
 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, en remplaçant c dans les équations précédentes, on trouve ;

$$dF_x = + \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{4\pi r^2}$$

$$dF_y = - \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{4\pi r^2}$$

Mais on a choisi la direction de déplacement des charges négatives qui est le sens opposé au sens conventionnel, on va inverser le signe de la vitesse v , c'est-à-dire, inverser le signe du courant I_2 pour être en conformité avec le sens conventionnel de courant électrique

Où I_2 dénote le courant dans le sens conventionnel, c'est-à-dire le sens opposé de déplacement des charges négatives.

Soit,

$$dF_x = - \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{4\pi r^2}$$

$$dF_y = + \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{4\pi r^2}$$

Ceci fait apparaître un produit vectoriel entre la vitesse V et un champ qu'on va appeler dB , supposons qu'il existe un champ B tel que ;

$$dF = \begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ 0 \end{pmatrix} = qV \times B = q \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dB_x \\ dB_y \\ dB_z \end{pmatrix}$$

Après la résolution en sachant que V_x ne peut être exprimé en fonction de V_y car les vecteurs associés sont orthogonaux, on trouve ;

$$dB_x = 0 \quad dB_y = 0$$

$$dB_z = - \frac{\mu_0 I_2 dx \cos(\alpha)}{4\pi r^2}$$

Autrement écrit;

$$dF_x = + dq_1 V_y dB_z$$

$$dF_y = - dq_1 V_x dB_z$$

La force F exercée sur q_1 dû au champ magnétique B engendré par le courant I_2 est donnée par;

$$F = q_1 V \times B$$

On vient de mettre en évidence l'existence du champ magnétique en appliquant la transformation de Lorentz sur le champ électrique.

En utilisant la loi de Biot et Savart pour déterminer B , On a ;

$$dB_x = 0$$

$$dB_y = 0$$

$$dB_z = - \frac{\mu_0 I_2 dx \cos(\alpha)}{4\pi r^2}$$

μ_0 étant la perméabilité du champ magnétique.

Ainsi, le fait de changer de référentiel a légèrement modifié les composantes du champ électrique orthogonales au déplacement, et a fait apparaître un champ magnétique. Ce champ n'est que l'effet relativiste du changement de référentiel.

On en déduit que si B est le champ magnétique et E_2 le champ électrique engendrés par une charge q_2 se déplaçant à la vitesse v suivant l'axe Ox , la force à laquelle la particule de charge q_1 se déplaçant à la vitesse V est soumise est cette fois-ci :

$$F = q_1 E_2 + q_1 V \times B$$

Les composantes de cette force sont :

$$F_x = q(V_y B_z - V_z B_y)$$

$$F_y = q(V_z B_x - V_x B_z)$$

$$F_z = q(V_x B_y - V_y B_x)$$

Soit ;

$$dF_x = - \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{4\pi r^2}$$

$$dF_y = + \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{4\pi r^2}$$

On va remplacer dx et r^2 dans les équations précédentes pour avoir α comme seule variable, d'où ;

$$x = a \cdot \tan(\alpha)$$

$$dx = \frac{a \cdot d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2(\alpha)}$$

$$dF_x = - \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_y d\alpha}{4\pi a}$$

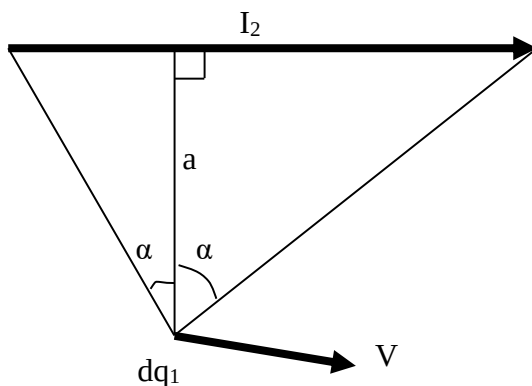
$$dF_y = + \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx \cos(\alpha) V_x d\alpha}{4\pi a}$$

Par intégration de α_1 à α_2 et α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, on trouve ;

$$dF_x = - \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx V_y [\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)]}{4\pi a}$$

$$dF_y = + \frac{dq_1 \mu_0 I_2 dx V_x [\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)]}{4\pi a}$$

Schématiquement on a :



1) Conducteur électrique de longueur infinie

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\pi/2 \text{ et } \alpha_2 = \pi/2$$

$$F_x = - \mu_0 I_2 dq_1 V_y$$

$$2\pi a$$

$$F_y = + \frac{\mu_0 I_2 dq_1 V_x}{2\pi a}$$

Si la charge dq_1 se déplace sur l'axe Ox alors $V_y = 0$

Mais

$$dq_1 V_x = dq_1 (dx/dt) = dx (dq_1/dt) = dx \cdot I_1$$

Soit

$$F_y = + \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi a}$$

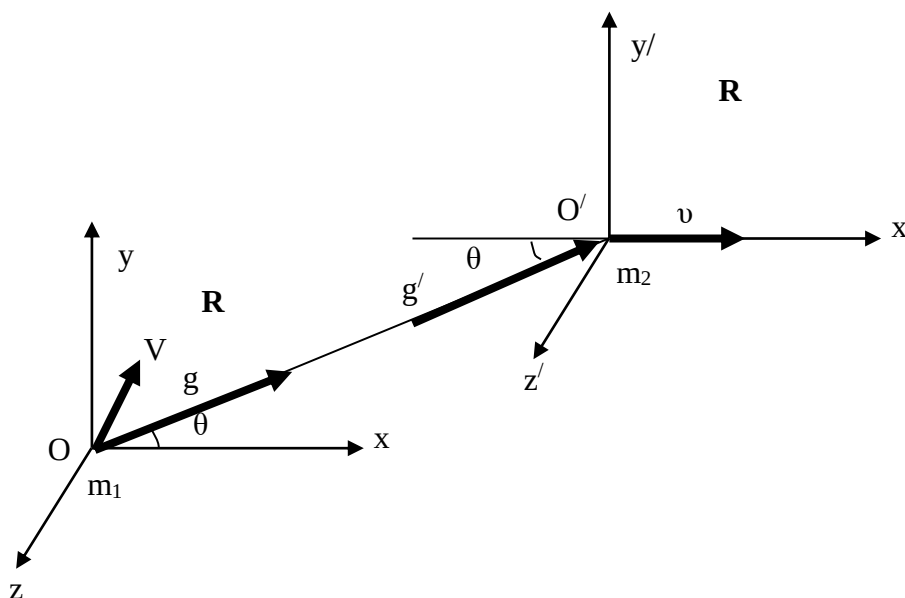
$$\frac{F_y}{dx} = + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Ceci vérifie bien la force entre deux conducteurs électriques par unité de longueur.

Première conclusion

En vertu du principe du principe de transformation des forces d'un référentiel à un autre en appliquant la transformation de Lorentz sur le champ électrique, on vient de mettre en évidence l'existence du champ magnétique. Comme la gravitation est une force aussi, on va donc appliquer la transformation de Lorentz sur le champ gravitationnel pour mettre en évidence l'existence champ gravitomagnétique.

EXISTENCE DU CHAMP GRAVITOMAGNETIQUE



On considère un référentiel R' en translation suivant l'axe Ox à la vitesse v par rapport au référentiel R . Soit m_2 une masse au repos dans le référentiel R' , par conséquent cette masse m_2 se déplace aussi à la vitesse v par rapport au référentiel R . Calculons la force que la masse m_2 exerce sur la masse m_1 , celle-ci se déplaçant à la vitesse V par rapport au référentiel R . g' dénote le champ gravitationnel engendré par m_2 par rapport au référentiel R' dans l'espace à une distance radiale r donnée, g dénote le champ gravitationnel engendré par m_2 par rapport au référentiel R dans l'espace à une distance radiale r donnée.

L'application de la transformation de Lorentz sur une force permet de savoir comment une force se transforme d'un référentiel R' au référentiel R à partir des relations suivantes.

$$F_x = \frac{1}{(1 + \beta \frac{V'_x}{c})} (F'_x + \beta \frac{F'_y V'_x}{c})$$

$$F_y = \frac{1}{\gamma(1 + \beta \frac{V'_x}{c})} F'_y$$

$$F_z = \frac{1}{\gamma(1 + \beta \frac{V'_x}{c})} F'_z$$

Avec ;

$$V'_x = \frac{(V_x - v)}{(1 - \beta \frac{V_x}{c})}$$

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma(1 - \beta \frac{V_x}{c})}$$

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma(1 - \beta \frac{V_x}{c})}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

c est la vitesse d'interaction du champ gravitationnel.

$$v \geq 0$$

On en déduit que

$$F_x = m_1 g'_x + \frac{\gamma \beta m_1}{c} (g'_y V_y + g'_z V_z)$$

$$F_y = \gamma m_1 g'_y - \frac{\gamma \beta m_1}{c} g'_y V_x$$

$$F_z = \gamma m_1 g'_z - \frac{\gamma \beta m_1}{c} g'_z V_x$$

Pour simplifier la démonstration, la vitesse V se trouve dans le plan $y'O'x'$

$$V_z = 0 \text{ et } F_z = 0$$

Les équations précédentes se simplifient :

$$F_x = m_1 g'_x + \frac{\gamma \beta m_1 g'_y V_y}{c}$$

$$F_y = \gamma m_1 g'_y - \frac{\gamma \beta m_1 g'_x V_x}{c}$$

On note la pseudo norme du vecteur à 4 dimensions ou quadrivecteur :
 $r^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = r'^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2$ où $\mathbf{r}^2$ et $\mathbf{r}'^2$ sont des vecteurs sur le radial reliant m_1 et m_2 ,
 r étant la distance entre la masse m_1 et m_2 . Cette quantité $r^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{r}'^2$ ne dépend pas du référentiel et constitue un invariant.
 En vertu de l'invariance de cette quantité ;

$k = G = 1/4\pi\epsilon_g$, G étant la constante de gravitation et ϵ_g étant la permittivité du champ gravitationnel dans le vide.

$$g'_x = + \frac{k m_2 \cos(\theta)}{r^2}$$

$$g'_y = + \frac{k m_2 \sin(\theta)}{r^2}$$

$$F_x = + \frac{k.m_1.m_2 \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma \beta k.m_1.m_2 \sin(\theta) V_y}{r^2 c}$$

$$F_y = + \frac{\gamma k.m_1.m_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma \beta k.m_1.m_2 \cos(\theta) V_x}{r^2 c}$$

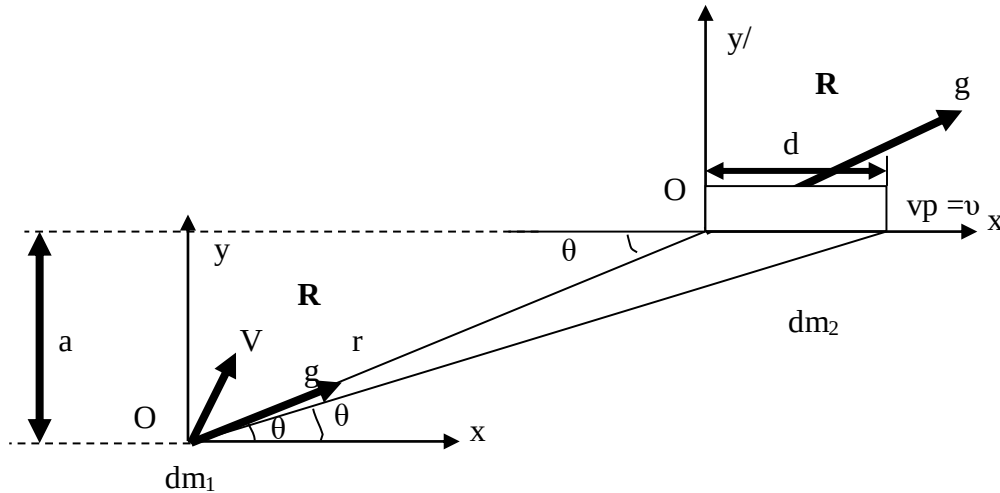
Equations fondamentales à adopter au champ gravitomagnétique

Si $c = \infty$, on retrouve l'équation de Newton, soit ;

$$F_x = + \frac{k.m_1.m_2 \cos(\theta)}{r^2}$$

$$F_y = + \frac{k.m_1.m_2 \sin(\theta)}{r^2}$$

Application



Considérons un tuyau sans masse rectiligne de longueur finie, parallèle au vecteur Ox , parcouru par un courant massique constant I_2 et dx le déplacement élémentaire du point donné sur le tuyau;

On va déterminer la force due à la masse dm_2 sur dm_1 . Comme le référentiel R' associé à la masse se déplace à la vitesse v par rapport au référentiel R .

$$dF_x = + \frac{k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma \beta k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\theta) V_y}{r^2 c}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma \beta k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\theta) V_x}{r^2 c}$$

Mais $\beta = v/c$

$$dF_x = + \frac{k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma dm_1 \cdot dm_2 v \sin(\theta) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma dm_1 \cdot dm_2 v \sin(\theta) V_x}{r^2 c^2}$$

Mais deux masses s'attirent, elles se comportent comme deux charges de signes opposés, comme deux courants électriques de sens opposé, on va inverser le signe de la vitesse v pour être en conformité avec les lois électromagnétiques.

Soit ;

$$dF_x = + \frac{k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \cos(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma k dm_1 \cdot dm_2 v \sin(\theta) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma k dm_1 \cdot dm_2 v \sin(\theta) V_x}{r^2 c^2}$$

Mais

$$v = \frac{dx}{dt}$$

v est la vitesse de la masse.

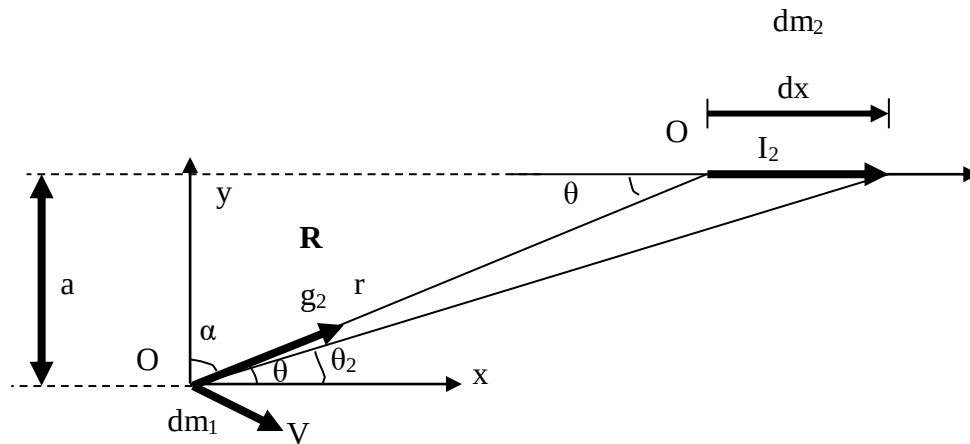
$$dm_2 v = dm_2 \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dm_2 dx}{dt} = I_2 dx, \text{ où est } I_2 = \text{le courant massique}$$

En remplaçant $dm_2 v$ dans les fonctions dF_x et dF_y , on a ;

$$dF_x = + \frac{k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \cos(\theta)}{r^2} - \frac{\gamma dm_1 I_2 dx \sin(\theta) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\theta)}{r^2} + \frac{\gamma dm_1 I_2 dx \sin(\theta) V_x}{r^2 c^2}$$

Changement de variable si $\theta = \pi/2 - \alpha$, θ varie de π à 0 et α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, comme le montre le schéma suivant.



$$dF_x = + \frac{k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \sin(\alpha)}{r^2} - \frac{\gamma k dm_1 I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{r^2 c^2}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma k \cdot dm_1 \cdot dm_2 \cos(\alpha)}{r^2} + \frac{\gamma k dm_1 I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{r^2 c^2}$$

Mais

$k = G = 1/4\pi\epsilon_g$, ϵ_g étant la permittivité du champ gravitationnel, soit μ_g une variable muette tel que $\epsilon_g \mu_g = 1/c^2$ et en remplaçant c et k dans les équations précédentes, on trouve ;

$$dF_x = + \frac{dm_1 \cdot dm_2 \sin(\alpha)}{4\pi\epsilon_g r^2} - \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{4\pi r^2}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma dm_1 \cdot dm_2 \cos(\alpha)}{4\pi\epsilon_g r^2} + \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{4\pi r^2}$$

Ceci fait apparaître un produit vectoriel entre la vitesse V et un champ qu'on va appeler B_g , supposons qu'il existe un champ B_g tel que;

$$dF_2 = \begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ 0 \end{pmatrix} = mV \times B_g = m \begin{pmatrix} V \\ V \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dB_g \\ dB_g \\ dB_{gz} \end{pmatrix}$$

$$dF_{x2} = - \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{4\pi r^2}$$

$$dF_{y2} = + \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{4\pi r^2}$$

Après la résolution en sachant que V_x ne peut être exprimé en fonction de V_y car les vecteurs associés sont orthogonaux, on trouve ;

$$B_{gx} = 0$$

$$B_{gy} = 0$$

$$dB_{gz} = - \frac{\mu_g I_2 dx \cos(\alpha)}{4\pi r^2}$$

Autrement écrit;

$$dF_x = \frac{dm_1 dm_2 \sin(\alpha)}{4\pi \epsilon_g r^2} + \gamma dm_1 V_y dB_{gz}$$

$$dF_y = \frac{\gamma dm_1 dm_2 \cos(\alpha)}{4\pi \epsilon_g r^2} - \gamma dm_1 V_x dB_{gz}$$

$$\text{Si } v \ll c, \gamma \approx 1$$

La force F exercée sur m_1 dû au courant massique et dû au champ gravitomagnétique B_g engendré par le courant massique I_2 est donnée par ;

$$F = m_1 g_2 + m_1 V \times B_g$$

On vient de mettre en évidence l'existence du champ gravitomagnétique.

En utilisant la loi de Biot et Savart pour déterminer B_g , comme dans l'électromagnétisme et en prenant la même convention, On a trouvé;

$$dB_{gx} = 0$$

$$dB_{gy} = 0$$

$$dB_{gz} = - \frac{\mu_g I_2 dx \cos(\alpha)}{4\pi r^2}$$

μ_g étant la perméabilité du champ gravitomagnétique.

Ainsi, le fait de changer de référentiel a légèrement modifié les composantes du champ gravitationnel orthogonales au déplacement, et a fait apparaître un champ gravitomagnétique. Ce champ n'est que l'effet relativiste du changement de référentiel.

On en déduit que si B_g est le champ gravitomagnétique et g_2 le champ gravitationnel, les deux engendrés par une masse m_2 se déplaçant à la vitesse v suivant l'axe Ox , la force à laquelle la particule de masse m_1 se déplaçant à la vitesse V est soumise est cette fois-ci :

$$F = m_1 g_2 + m_1 V \times B_g$$

Avec

Les composantes de cette force sont :

$$F_x = q(V_y B_{gz} - V_z B_{gy})$$

$$F_y = q(V_z B_{gx} - V_x B_{gz})$$

$$F_z = q(V_x B_{gy} - V_y B_{gx})$$

Formules fondamentales

En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss pour le champ gravitationnel g , on a ;

$$\text{div } g = -m/\epsilon_g$$

En utilisant l'équation de conservation du flux pour le champ gravitomagnétique B_g , on a ;

$$\text{rot } B_g = 0$$

soit ;

$$dF_x = + \frac{dm_1 dm_2 \sin(\alpha)}{4\pi\epsilon_g r^2} - \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 dx \cos(\alpha) V_y}{4\pi r^2}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma dm_1 dm_2 \cos(\alpha)}{4\pi\epsilon_g r^2} + \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 dx \cos(\alpha) V_x}{4\pi r^2}$$

On va remplacer dx et r^2 dans les équations précédentes pour avoir α comme seule variable, ρ_2 est la densité linéique massique, d'où ;

$$x = a \cdot \tan(\alpha)$$

$$dm_2 = \rho_2 dx$$

$$dx = \frac{a \cdot d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2(\alpha)}$$

$$dF_x = + \frac{dm_1 \rho_2 \sin(\alpha) d\alpha}{4\pi\epsilon_g a} - \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 \cos(\alpha) V_y d\alpha}{4\pi a}$$

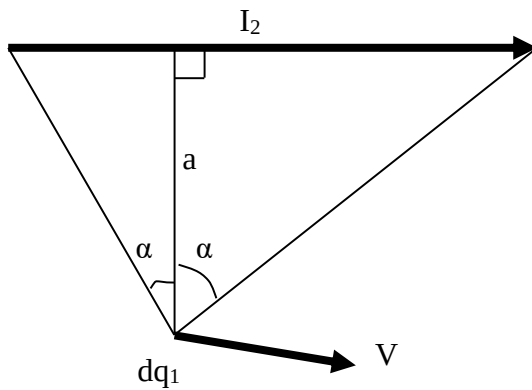
$$dF_y = + \frac{\gamma dm_1 \rho_2 \cos(\alpha) d\alpha}{4\pi\epsilon_g a} + \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 \cos(\alpha) V_x d\alpha}{4\pi a}$$

Par intégration de α_1 à α_2 et α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, on trouve ;

$$dF_x = - \frac{dm_1 \rho_2 [\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)]}{4\pi\epsilon_g a} - \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 V_y [\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)]}{4\pi a}$$

$$dF_y = + \frac{\gamma dm_1 \rho_2 [\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)]}{4\pi\epsilon_g a} + \frac{\gamma dm_1 \mu_g I_2 V_x [\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)]}{4\pi a}$$

Schématiquement on a ;



1) Conducteur massique de longueur infinie.

$$\alpha_1 = -\pi/2 \text{ et } \alpha_2 = \pi/2$$

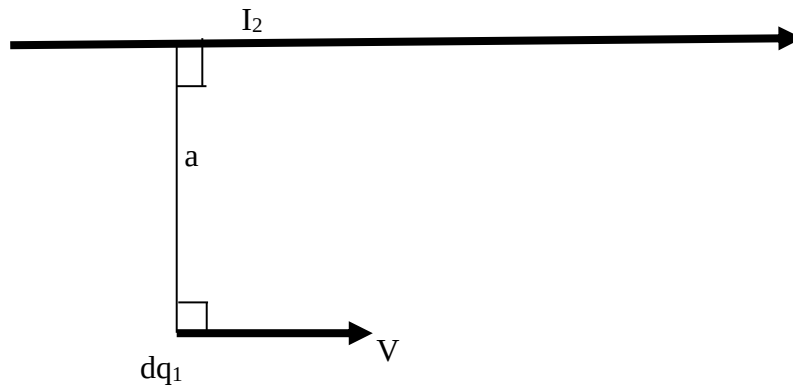
$$F_x = + 0 - \frac{\gamma \cdot \mu_g dm_1 I_2 \cdot V_y}{2\pi a}$$

$$F_y = + \frac{\gamma \cdot dm_1 \cdot \rho_2}{2\pi\epsilon_g a} + \frac{\gamma \cdot \mu_g dm_1 I_2 \cdot V_x}{2\pi a}$$

Si la particule de masse dm_1 se déplace suivant l'axe Ox , $V_y = 0$, comme montre le schéma suivant ;

$$F_x = 0$$

$$F_y = + \frac{\gamma \cdot dm_1 \cdot \rho_2}{2\pi\epsilon_g a} + \frac{\gamma \cdot \mu_g dm_1 I_2 \cdot V_x}{2\pi a}$$



Si I_1 est le courant massique engendré par la particule de masse dm_1 et ρ_1 la densité linéique massique.

$$dm_1 \cdot Vx = dm_1 \frac{dx}{dt} = \frac{dm_1}{dt} dx = I_1 dx$$

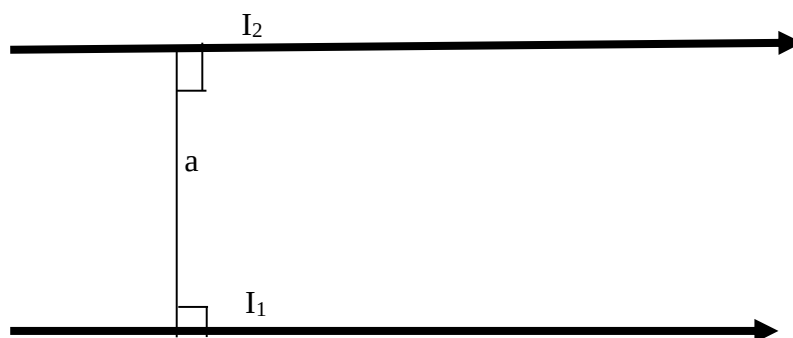
$$dm_1 = \rho_1 dx$$

on a donc;

$$F_y = + \frac{\gamma \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{2\pi\epsilon_g a} dx + \frac{\gamma \cdot \mu_g I_1 I_2}{2\pi a} \cdot dx$$

$$\frac{F_y}{dx} = + \frac{\gamma \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{2\pi\epsilon_g a} + \frac{\gamma \cdot \mu_g I_1 I_2}{2\pi a}$$

D'où la force entre deux tuyaux parallèles sans masse parcourus par deux courants massiques I_1 et I_2 dans la même direction par une unité de longueur, comme le montre le schéma suivant ;



Force attractive gravitomagnétique

$$\frac{F_y}{dx} = + \frac{\gamma \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{2\pi \epsilon_g a} + \frac{\gamma \cdot \mu_g I_1 I_2}{2\pi a}$$

Observation, quand deux tuyaux parallèles sans masse sont parcourus par deux courants massiques constants I_1 et I_2 dans la même direction, quand v_1 et $v_2 \rightarrow c$ la force d'attraction tend vers l'infini.

Force répulsive gravitomagnétique

Observation ; quand deux tuyaux parallèles sans masse sont parcourus par deux courants massiques constants I_1 et I_2 dans deux directions opposées, il y a une force de répulsion qui apparaît dû au champ gravitomagnétique, au four et à mesure que le produit $I_1 \cdot I_2$ augmente, la force entre les deux courants massiques diminue. A moment donné cette force s'annule.

Soit,

$$\frac{F_y}{dx} = 0 \Rightarrow + \frac{\gamma \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{2\pi \epsilon_g a} - \frac{\gamma \cdot \mu_g I_1 I_2}{2\pi a} = 0$$

$$\frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\epsilon_g \mu_g} = I_1 I_2$$

$$\rho_1 = \frac{dm_1}{dx_1}, \rho_2 = \frac{dm_2}{dx_2}, I_1 = \frac{dm_1}{dt} \text{ et } I_2 = \frac{dm_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_g \mu_g} = v_1 \cdot v_2$$

Comme nous avons pris comme hypothèse $\epsilon_g \mu_g = 1/c^2$, il suffit que le produit $v_1 \cdot v_2$ soit égale à c^2 pour que la force s'annule entre les deux masses se déplaçant sur deux droites parallèles mais comme aucune particule ne peut dépasser la vitesse de la lumière, il faut et il suffit que $v_1 = v_2 = c$, la vitesse de la lumière, c'est la vitesse remarquable.

Remarque 1 : Deux masses se mouvant sur deux droites parallèles dans la même direction s'attirent et deux masses se mouvant sur deux droites parallèles dans deux directions opposées se répulsent dû au champ gravitomagnétique.

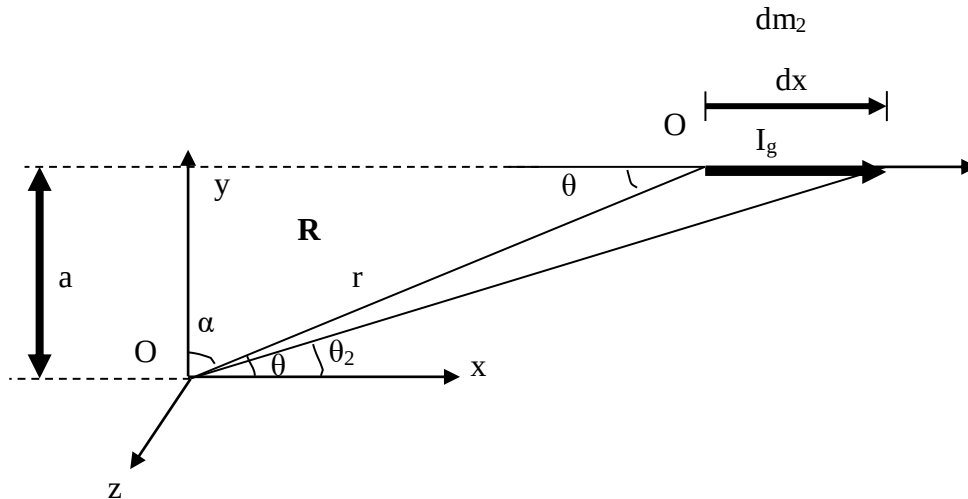
En vertu du principe de transformation des forces d'un référentiel à un autre, en appliquant la transformation de Lorentz sur le champ gravitationnel, on vient de mettre en évidence l'existence du champ gravitomagnétique.

On a démontré que le champ magnétique est donné par ;

The diagram shows a magnetic dipole of length a and current I in a magnetic field $\mathbf{B}$. The dipole is oriented at an angle θ_2 to the x -axis. A small element dx at distance r from the origin O carries current I and has a magnetic field vector $d\mathbf{q}_2$. The angle between the dipole axis and the field vector is θ .

On a démontré que le champ gravitomagnétique est donné par ;

22



On va exprimer le courant massique I_g en fonction du courant électrique I , le courant électrique est engendré par des électrons de masse m_e et de charge q_e , dans ce cas un courant électrique entraîne un courant massique due au déplacement des électrons. Les coordonnées de la masse d'un électron sont les mêmes que celles de la charge d'un électron. Soit ;

- q_e est la charge d'un électron
- m_e est la masse d'un électron
- n est le nombre d'électrons
- I est le courant électrique
- I_g est le courant massique
- Q est la charge électrique
- t dénote le temps

$$I = dQ/dt$$

$$I_g = dm/dt$$

Le nombre d'électrons n est donné par,

$$n = Q/q_e$$

La masse m totale des électrons en déplacement est donnée par ;

$$m = n \cdot m_e$$

$$I_g = \frac{dm}{dt} = m_e \frac{dn}{dt} = \frac{m_e}{q_e} \frac{dQ}{dt} = \frac{m_e}{q_e} \cdot I$$

La charge d'un électron est une quantité scalaire négative, dans ce cas I_g et I sont en sens opposé.

Mais

$$dB_g = - \frac{\mu_g I_g dx \cos(\alpha)}{4\pi r^2}$$

En substituant I_g dans l'équation dans l'équation précédente, on trouve ;

$$dB_g = - \frac{m_e \cdot \mu_g I dx \cos(\alpha)}{q_e 4\pi r^2}$$

Le champ magnétique est donné par ;

$$dB = - \frac{\mu_0 I dx \cos(\alpha)}{4\pi r^2}$$

On divisant dB_z par dB_{gz} , on trouve ;

$$dB = \frac{q_e \cdot \mu_0}{m_e \mu_g} \cdot dB_g$$

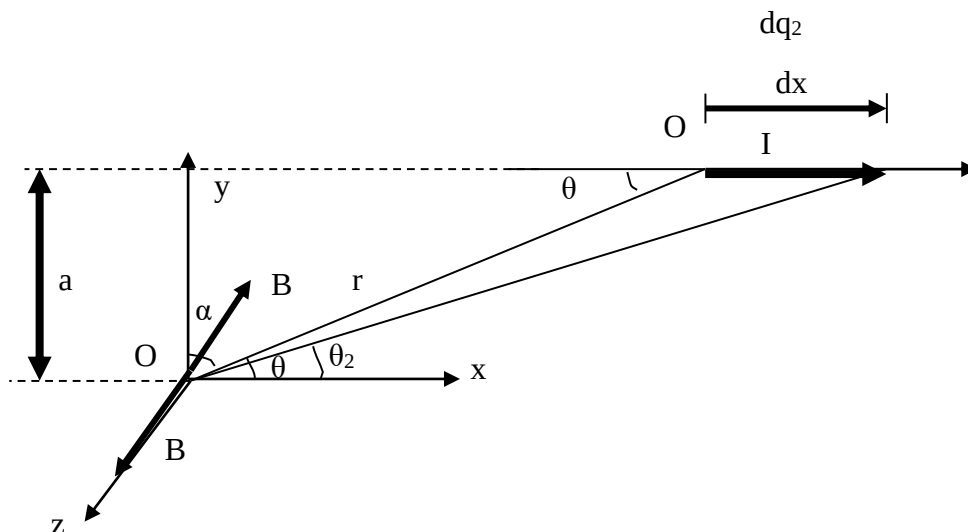
Par intégration, on trouve ;

$$B = \frac{q_e \cdot \mu_0}{m_e \mu_g} \cdot B_g + (\text{constante} = 0)$$

$$B_g = \frac{m_e \mu_g}{q_e \mu_0} \cdot B$$

La constante d'intégration est égale à zéro car si $B = 0 \rightarrow B_g = 0$.

Le schéma suivant montre le champ magnétique B et le champ gravitomagnétique B_g pour un circuit électrique où les électrons sont des porteurs de charge, la force gravitomagnétique serait 1600 fois plus élevée si les protons étaient les porteurs de charge.



On constate qu'un courant électrique engendre un courant massique due à la masse des électrons en déplacement, ce courant massique engendre un champ gravitomagnétique. Ceci est très important car on verra plus tard que la lumière n'est pas seulement composée d'onde

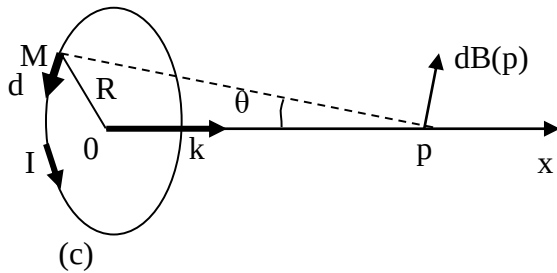
électromagnétique mais elle est aussi composée d'onde gravitomagnétique. On appellera cette onde, onde **électrogravitomagnétique**.

Remarque 2 : Comme l'application de la transformation de Lorentz sur le champ gravitationnel donne exactement le même résultat que la loi de Biot et Savart pour un courant massique constant et rectiligne, et si on considère un courant massique constant décrit par une courbe quelconque comme une succession de courants massiques constants infiniment petits, on peut par intégration calculer le champ gravitomagnétique en un point donné en utilisant la loi de Biot et Savart comme outil mathématique.

Conséquences :

2) Spire circulaire massique en rotation.

On considère une spire circulaire C de centre 0 et de rayon R, parcourue par un courant massique I. et dont l'axe Ox est parallèle au vecteur unitaire k orienté comme indiqué sur la figure ci-dessous. On se propose de déterminer le champ gravitomagnétique sur l'axe de la spire en utilisant la loi de Biot et Savart comme outil mathématique.



M étant un point sur la spire, d'après la loi de Biot et Savart, le champ gravitomagnétique élémentaire $dB(p)$ créé en un point P de l'axe par l'élément de longueur dM de la spire orienté dans le sens du courant, est donné par la relation.

$$dB(p) = \frac{\mu_g I dM \times u}{4\pi \|MP\|^2}$$

Où u est le vecteur unitaire de MP, $u = MP / \|MP\|$.

Deux éléments de courant symétriques par rapport à 0 créent en P des champs gravitomagnétiques qui s'annulent sur le plan yOz . Il n'y a que la composante suivant l'axe Ox à déterminer.

On désigne par θ l'angle OpM . L'angle entre les vecteurs $dB(p)$ et k est alors de $\pi/2 - \theta$ et la projection de $dB(p)$ sur l'axe Ox a pour expression ;

$$dB(p)_x = \frac{\mu_g I dM \sin(\theta)}{4\pi \|MP\|^2}$$

Par intégration sur toute la longueur de la spire on obtient ;

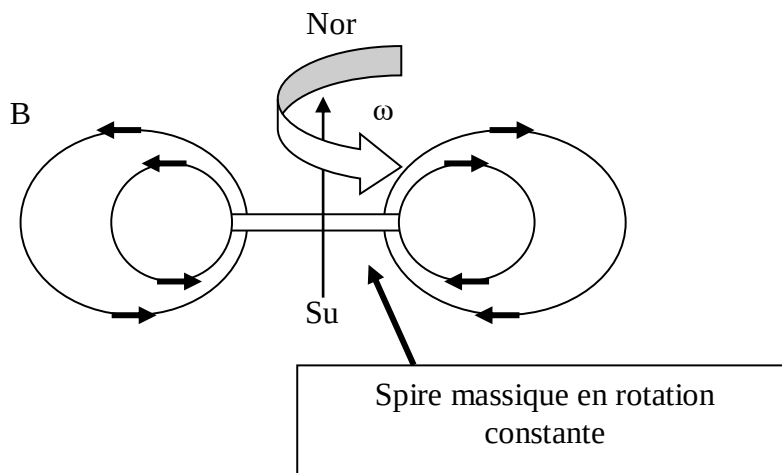
$$B(p)_x = \frac{\mu_g I 2\pi R \sin(\theta)}{4\pi \|MP\|^2}$$

$$\|MP\| = R/\sin(\theta)$$

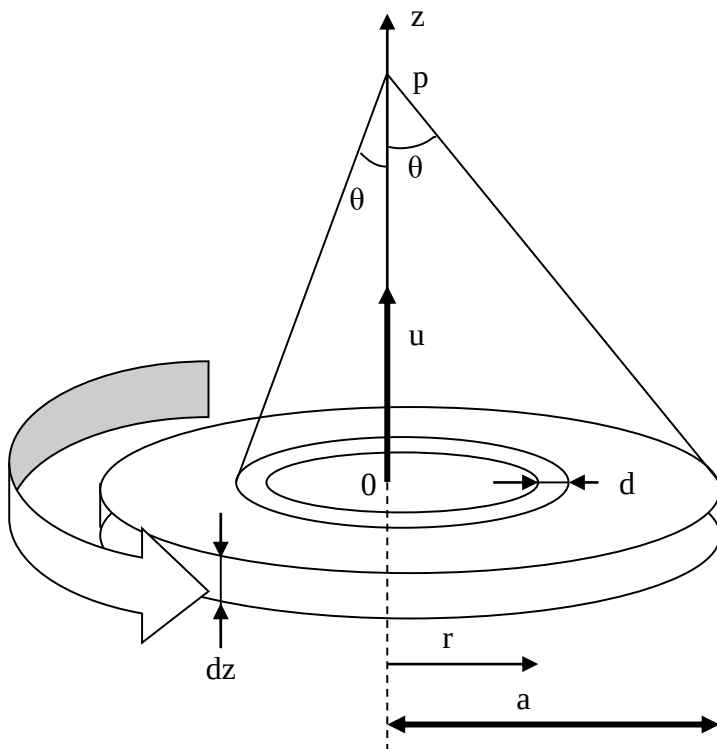
⇒ Le champ gravitomagnétique a pour expression;

$$B(p)_x = \frac{\mu_g I \sin^3(\theta)}{2R}$$

Le schéma suivant montre le champ gravitomagnétique au tour d'une spire



3) Disque massique en rotation



oit σ la densité volumique du disque.

Le disque mis en rotation au tour de l'axe Oz est équivalent à une succession d'anneaux circulaires de centre O, de rayon r, d'épaisseur dr, de profondeur dz et parcourus par un courant massique d'intensité I. Chaque anneau crée alors au point p situé sur l'axe Oz le champ élémentaire dB(p,dz), $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence de rotation;

$$dB(p,dz)_z = \mu_g \frac{I \sin^3(\theta)}{2r}$$

$I = dm/dt$, c'est la quantité de masse qui traverse la surface dr.dz par unité de temps.

$$I = dm/dt = \sigma \cdot drdz \cdot \text{vitesse} = \sigma \cdot drdz \cdot r\omega$$

$$dB(p,dz)_z = \mu_g \frac{\sigma \cdot drdz \cdot r\omega \sin^3(\theta)}{2r}$$

$$dB(p,dz)_z = \mu_g \frac{\sigma \cdot \omega drdz \sin^3(\theta)}{2}$$

En différentiant la relation $\tan(\theta) = r/z$, il vient $dr = z d\theta / \cos^2(\theta)$, d'où l'expression du champ élémentaire en fonction de la seule variable θ :

$$dB(p,dz)_z = \mu_g \frac{\sigma \cdot \omega z dz \cdot \sin^3(\theta) d\theta}{2 \cos^2(\theta)}$$

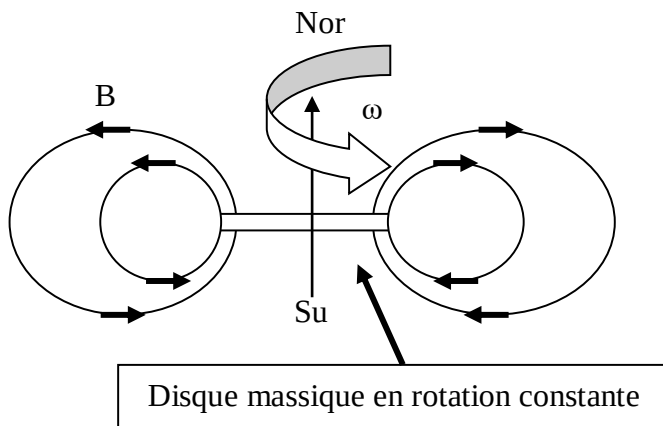
Le champ gravitomagnétique total crée par le disque en rotation devient, en notant θ_0 l'angle extrême telque $\tan(\theta_0) = a/z$ et $\cos(\theta_0) = z/\sqrt{a^2 + z^2}$.

$$\frac{\sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{(1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \sin(\theta)$$

Par intégration entre 0 et θ_0 ;

$$dB(p,dz)_z = \mu_g \frac{\sigma \cdot \omega z dz}{2} \left(\frac{1}{\cos(\theta_0)} + \cos(\theta_0) - 2 \right)$$

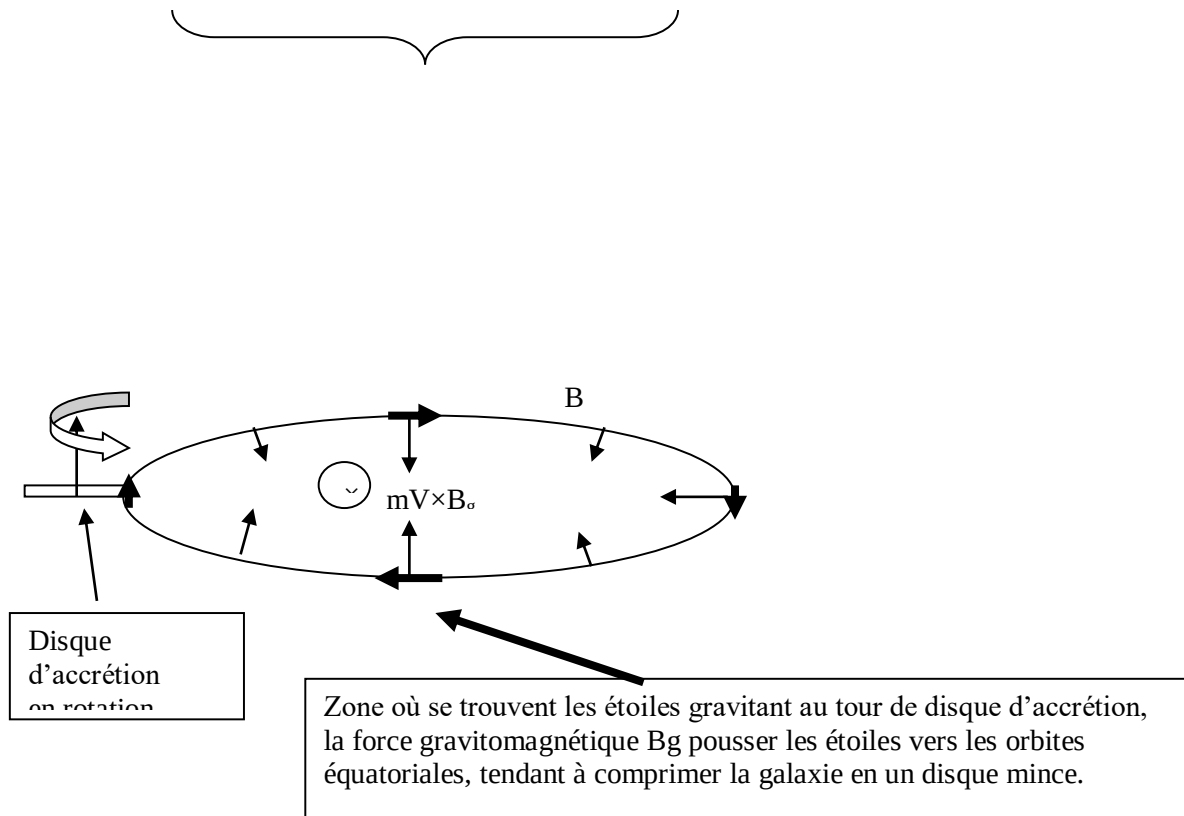
Le schéma suivant montre la forme schématique du champ gravitomagnétique d'un disque massique en rotation à une vitesse angulaire constante ;



Remarque 3 : conséquence de la remarque 1, Deux spires/disques en rotation constante sur le même axe, dans la même direction angulaire, s'attirent et deux spires/disques en rotation constante sur le même axe, dans deux directions angulaires opposées, se répulsent dû au champ gravitomagnétique. On pourra dès lors parler de polarité des masses en rotation, nord et sud comme pour les électroaimants.

Effet du champ gravitomagnétique sur la forme des galaxies

Quand nous observons les formes des galaxies à disque, comment sont-elles admirablement planes ? La rotation de centre de la galaxie crée un champ gravitomagnétique (B_g) comme le montre le schéma suivant ;



La forme plane des galaxies n'est pas une surprise, les étoiles orbitant autour du centre de galaxie sont soumises à la force de cette forme.

$$F = (mg + mV \times B_g + mr\omega^2) u_r$$

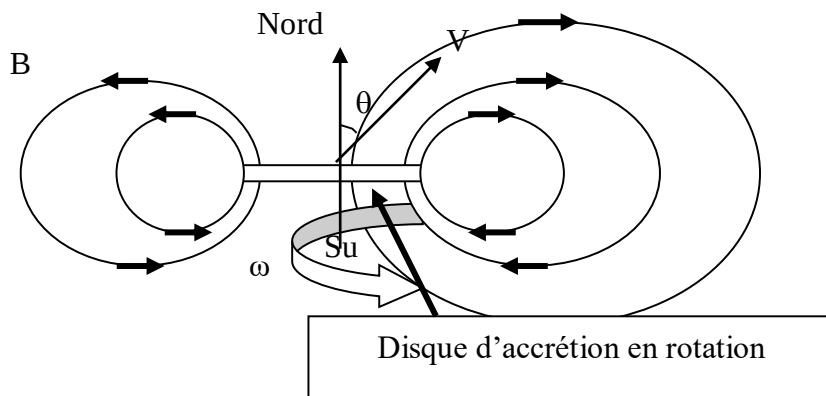
Où u_r est le vecteur unitaire radial, g est la force gravitationnelle engendrée par le centre de galaxie et les masses à l'intérieur du rayon r , m la masse de l'objet étudié, $mr\omega^2$ est la force centrifuge, r la distance radiale, ω la pulsation effective des masses à l'intérieure du rayon,
 $\omega = 2\pi f$, f la fréquence effective de rotation.

Il n'y a que les orbites se trouvant à l'équateur qui sont stables, dû au champ gravitomagnétique, les orbites environnantes subissent à une force vers le bas quand elles se trouvent au-dessus de l'équateur, et vers le haut quand elles se trouvent en dessous de l'équateur jusqu'à ce qu'elles se trouvent à l'équateur. Les orbites rétrogrades ne sont pas permises, avec le temps, elles deviennent progrades, et se déplaceront vers le plan de l'équateur du centre rotatif de la galaxie (collapsus angulaire). Même une galaxie sphérique rotative devient, avec le temps, une galaxie ellipsoïde et finalement un disque. Si la force de gravitation devient trop grande une galaxie spirale commence à être façonnées.

La forme très plane des anneaux de saturne et le fait que toutes les orbites de toutes les planètes du système solaire, sauf celle de la planète Pluto, se trouvent presque dans le même plan est dû au champ gravitomagnétique.

Jets bipolaires des matières

Si la matière, dans le disque d'accrétion, atteint la vitesse d'évasion, elle va être éjectée dans une direction donnée par rapport à l'axe de rotation, soit θ l'angle entre l'axe de rotation et la vitesse initiale d'évasion V , on considère le pôle nord du disque d'accrétion, comme le montre le schéma suivant ;



Plus l'angle est petit moins la matière coupe les lignes gravitomagnétiques, donc moins la déviation est grande. Plus l'angle est grand, plus la matière coupe les lignes gravitomagnétiques, donc plus la déviation est grande. Ainsi la matière décrit une trajectoire hélicoïdale mais le rayon augmente avec la distance radiale (oblique). Il y a trois possibilités ;

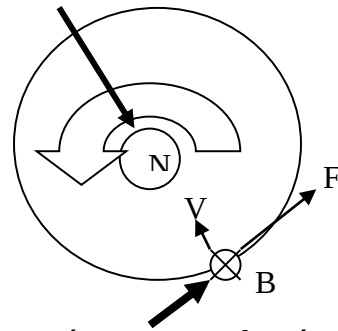
- La matière retombe dans le disque d'accrétion.
- La matière entre en orbite ou entre en collision avec d'autres matières.
- La matière s'échappe dans l'espace.

Le dernier cas est le plus intéressant car la matière s'échappe dans l'espace sur une trajectoire hélicoïdale, l'ensemble de ces trajectoires à presque une forme d'un cône en rotation. Le pôle sud du disque d'accrétion est le siège du même phénomène. Ceci explique la forme des jets bipolaires des matières par le disque d'accrétion.

Aspiration spirale des matières

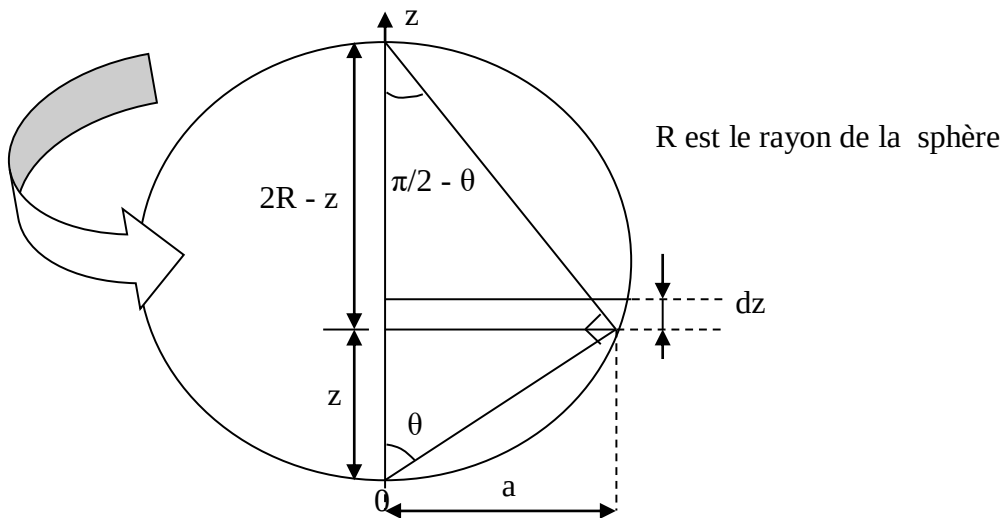
Quand la matière approche le disque d'accrétion à la vitesse V , une force F_b perpendiculaire à la vitesse V est exercée sur la matière par le champ gravitomagnétique B_g , ainsi la matière est happée dans une spirale par le disque d'accrétion. Comme le montre le schéma suivant, ceci explique la forme de l'aspiration spirale des matières par le disque d'accrétion.

Disque d'accrétion vue du pôle nord



Le champ gravitomagnétique B_g est dirigé perpendiculaire vers ce schéma

4) Sphère pleine en rotation.



La sphère mise en rotation autour de l'axe est équivalente à une succession de disques circulaires pleins de centre $0z$, de rayon a , d'épaisseur dz et de densité volumique σ . Chaque disque crée alors au point 0 sur l'axe $0z$ le champ élémentaire, $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence de rotation. **Attention** ; la perméabilité μ_g du camp gravitomagnétique n'a peut être pas la même valeur dans la matière que dans le vide, de même pour la vitesse c d'interaction.

$$dB(0)_z = \frac{\mu_g \sigma \omega dz}{2} \left(\frac{1}{\cos(\theta)} + \cos(\theta) - 2 \right)$$

On va déterminer zdz ;

$$\frac{a}{z} = \tan(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{a}{(2R - z)} = \tan(\pi/2 - \theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\rightarrow z = 2R \cos^2(\theta)$$

$$dz = -4R \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

$$zdz = -8R^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) d\theta$$

En remplaçant zdz dans la fonction $dB(0)_z$, on a ;

$$dB(0)_z = -4\mu_g \sigma \cdot \omega R^2 [\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \sin(\theta)\cos^4(\theta) - 2\sin(\theta)\cos^3(\theta)]d\theta$$

Par intégration entre $\pi/2$ à 0

$$B(0)_z = -4\mu_g \sigma \cdot \omega R^2 \left[-\frac{\cos^3(\theta)}{3} - \frac{\cos^5(\theta)}{5} + \frac{\cos^4(\theta)}{2} \right]_{\pi/2}^0$$

$$B(0)_z = -4\mu_g \sigma \cdot \omega R^2 \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

$$B(0)_z = -4\mu_g \sigma \cdot \omega R^2 \left(-\frac{1}{30} \right)$$

$$B(0)_z = + \frac{2\mu_g \sigma \cdot \omega R^2}{15} = \frac{2\mu_g \sigma 2\pi f R^2}{15} = \frac{\mu_g}{5TR} \cdot \frac{\sigma 4\pi R^3}{3}$$

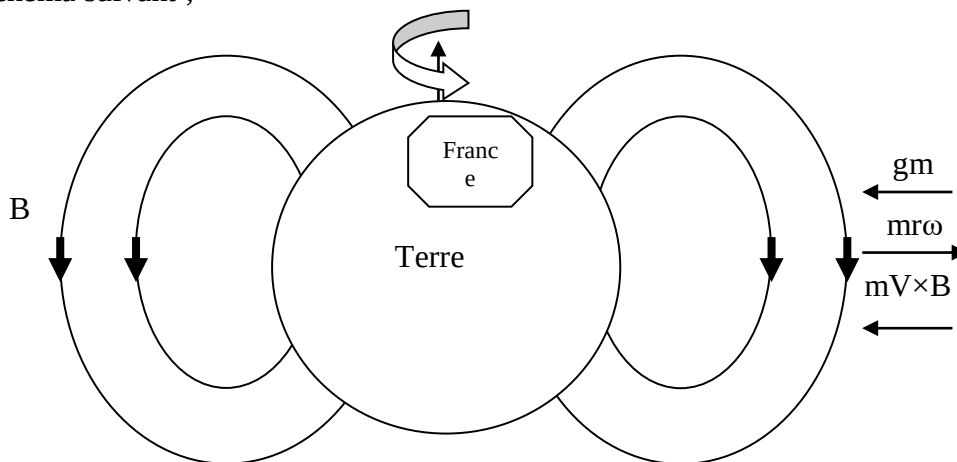
mais $\frac{\sigma 4\pi R^3}{3}$ = densité volumique $\times$ volume de sphère = M masse de sphère.

$$B(0)_z = \frac{\mu_g M}{5TR}$$

T est la période de rotation.

Champ gravitomagnétique aux pôles terrestres

La rotation de la terre engendre un champ gravitomagnétique comme le montre le schéma suivant ;



Le champ gravitomagnétique est donné par ;

$$B(0)_z = \frac{\mu_g M}{5TR} = \frac{4\pi G M}{5Rc^2 T}, \text{ car } \mu_g \epsilon_g = 1/c^2 \text{ and } G = 1/4\pi \epsilon_g$$

Ce champ $B(0)_z$ est vectorisé vers le nord géographique

G est la constante de gravitation.

T est la période de rotation = $60 \times 60 \times 24$ secondes.

$$G = 1/4\pi \epsilon_g$$

$$\mu_g \epsilon_g c^2 = 1$$

c est la vitesse de la lumière (hypothèse : l'interaction gravitationnelle dans la matière se fait à la vitesse de la lumière).

ϵ_g étant la permittivité du champ gravitationnel, μ_g étant la perméabilité du champ gravitomagnétique dans le vide.

$$\mu_g = 9.4 \times 10^{-27} \text{ m/kg}$$

$$M = 5.973 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$$

$$T = 86400 \text{ s}$$

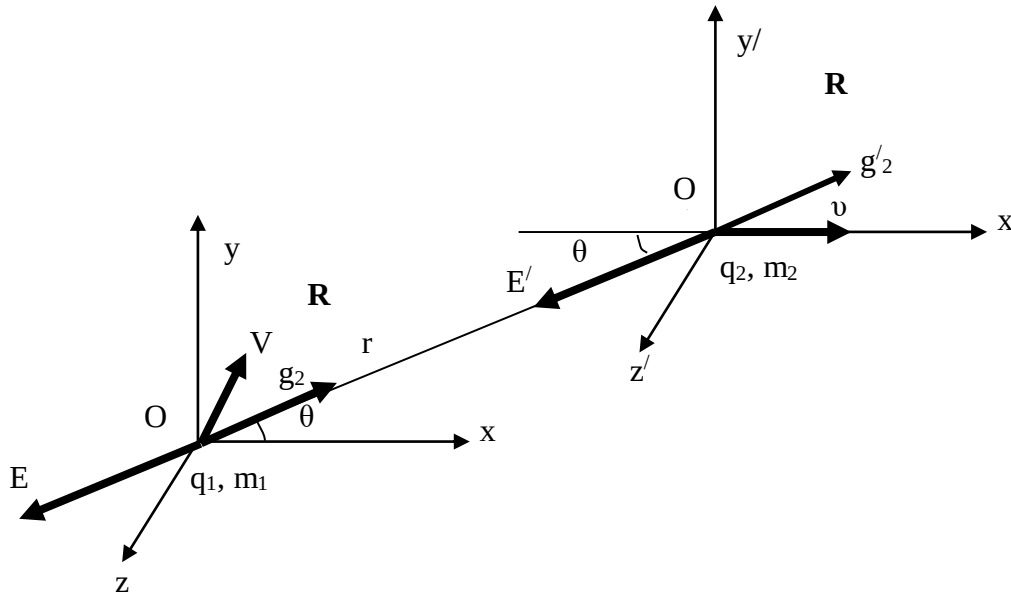
$$B(0)_z = 2 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$$

Particule massique et chargée

On en déduire que si B est le champ magnétique, E_2 le champ électrique, si B_g est le champ gravitomagnétique et g_2 le champ gravitationnel engendrés par une particule de charge q_2 et de masse m_2 se déplaçant à la vitesse v suivant l'axe Ox , la force à laquelle la particule de charge q_1 et de masse m_1 se déplaçant à la vitesse V est soumise est cette fois-ci :

$$F = q_1 E_2 + m_1 g_2 + V \times (q_1 B + m_1 B_g)$$

Équation fondamentale d'électrogravitomagnétique



Troisième Conclusion

En vertu du principe de transformation des forces d'un référentiel à un autre en translation à une vitesse constante l'un par rapport à l'autre, en appliquant la transformation de Lorentz sur le champ gravitationnel, on a mis en évidence l'existence du champ gravitomagnétique.

Propagation des ondes gravitomagnétiques

Pour déterminer le champ gravitomagnétique, on est amené à distinguer trois zones de rayonnement :

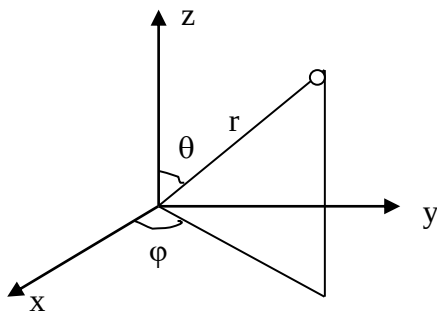
- la zone de rayonnement proche, du champ quasi stationnaire ($r \ll \lambda$) ;
- la zone de rayonnement intermédiaire ($r \approx \lambda$) ;
- la zone de rayonnement lointain ($r \gg \lambda$) ;

On va se limiter qu'à l'étude de la dernière zone de rayonnement.

Electromagnétisme et gravitomagnétisme

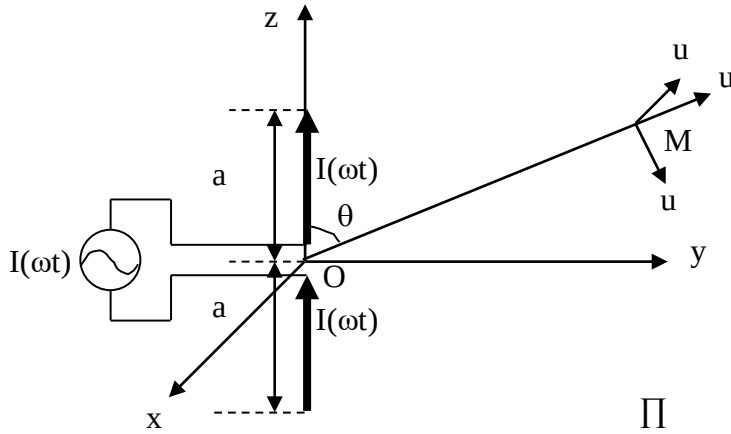
Onde électromagnétique, zone lointaine :

On utilise les coordonnées sphériques comme le montre le schéma suivant ;



Soit un doublet de Hertz, on admet que le courant électrique est uniforme (l'amplitude et la phase sont indépendantes). Soit une antenne de longueur $2a$. Le potentiel vecteur $A(M, t)$ retardé créé par cet élément de courant en un point M très éloigné est donné par (voir le schéma suivant) :

Avec $i = I_0 \cos(\omega t)$



Doublet de Hertz symétrisé

$$A(M, t) = \mu_0 \int_0^{2a} \frac{dl}{4\pi r} i(t-r/c)$$

$$i(t-r/c) = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = e^{j\omega t} e^{-ikr} u_z$$

Avec $k = \frac{\omega}{c} u_r$ et $j = \sqrt{-1}$

On a donc :

$$A(M, t) = \frac{\mu_0 2a I_0}{4\pi r} e^{j\omega t} e^{jkr} u_z$$

Soit pour le vecteur réel :

$$A(M, t) = \frac{\mu_0 a I_0}{2\pi r} \cos(\omega t - kr) u_z$$

$$4\pi r$$

Dans l'approximation de l'onde plane, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot}(\mathbf{A}) = -j\mathbf{k} \times \mathbf{A} \\ &= -j \|\mathbf{k}\| \mathbf{u}_r \times \|\mathbf{A}\| \mathbf{u}_z = j \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{A}\| \sin(\theta) \mathbf{u}_\phi \end{aligned}$$

soit :

$$\mathbf{B} = \frac{j k \mu_0 \underline{2aI_0} \sin(\theta)}{4\pi r} e^{j\omega t} e^{jkr} \mathbf{u}_\phi$$

et comme $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}$, on en déduit :

$$\mathbf{E} = \frac{j k \mu_0 \omega \underline{2aI_0} \sin(\theta)}{4\pi r} e^{j\omega t} e^{jkr} \mathbf{u}_\theta$$

Soit pour les champs réels:

$$\mathbf{B} = - \frac{\mu_0 \underline{kaI_0} \sin(\theta)}{2\pi r} \sin(\omega t - kr) \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{E} = - \frac{\mu_0 \underline{\omega aI_0} \sin(\theta)}{2\pi r} \sin(\omega t - kr) \mathbf{u}_\theta$$

Le vecteur de Poynting moyen s'écrit:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{R} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{\mu_0 a^2 (I_0)^2 \omega^2 \sin^2(\theta)}{8\pi^2 r^2 c} \mathbf{u}_r$$

$\mathbf{B}^*$ = le conjugué de $\mathbf{B}$ $(a + jb)^* = (a - jb)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $j = \sqrt{-1}$.

L'ensemble des équations de Maxwell et Faraday constitue une application linéaire. En mathématiques, une **application linéaire** (aussi appelée *opérateur linéaire* ou *transformation linéaire*) est une application entre deux espaces vectoriels qui respecte l'addition des vecteurs et la multiplication scalaire définie dans ces espaces vectoriels, ou, en d'autres termes, qui « préserve les combinaisons linéaires ».

Définitions

Soit

$f : E \rightarrow F$ de l'ensemble E vers F

Une application où E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

f est une **application linéaire** (ou **morphisme de $\mathbb{K}$ espaces vectoriels**) si :

- $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Une application possédant la première propriété est dite **additive**, et, pour la seconde, **homogène**.

Si B_g est le champ gravitomagnétique et B le champ magnétique, on a déjà démontré que :

$$\mathbf{B}_g = \frac{\mathbf{m}_e \boldsymbol{\mu}_g}{q_e \mu_0} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_b, \text{ } u_b \text{ étant un vecteur unitaire.}$$

D'après la relativité générale d'Einstein $m_e = m_{e0} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, m_{e0} étant la masse d'électron au repos. $v = V_{\max} \cdot \cos(\omega t)$, où $V_{\max}$ est la vitesse maximale d'électrons et v la vitesse à la date t .

Soit $V_{\max} \ll c$, $\rightarrow m_e \approx m_{e0}$

Après substitution dans l'équation précédente, B_g est donné par :

$$B_g = - \mu_0 \frac{ka \mathbf{m}_e \boldsymbol{\mu}_g}{2\pi r q_e \mu_0} I_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) u_\phi$$

Soit :

$$\text{Scalaire (S)} = \frac{\mathbf{m}_e \boldsymbol{\mu}_g}{q_e \mu_0}$$

S est le scalaire multiplicateur correspondant à λ dans l'application linéaire, à ne pas confondre avec la longueur d'onde.

Comme l'ensemble des équations de Maxwell et Faraday constitue une application linéaire additive et **homogène**. Comme les champs, électromagnétique et gravitomagnétique sont liés par un scalaire et comme cette application est invariante par rapport à la multiplication par un scalaire (**homogène**).

On peut donc affirmer qu'il existe un champ g tel que :

$$B_g = \frac{k \times g}{\omega}, \text{ on en déduit :}$$

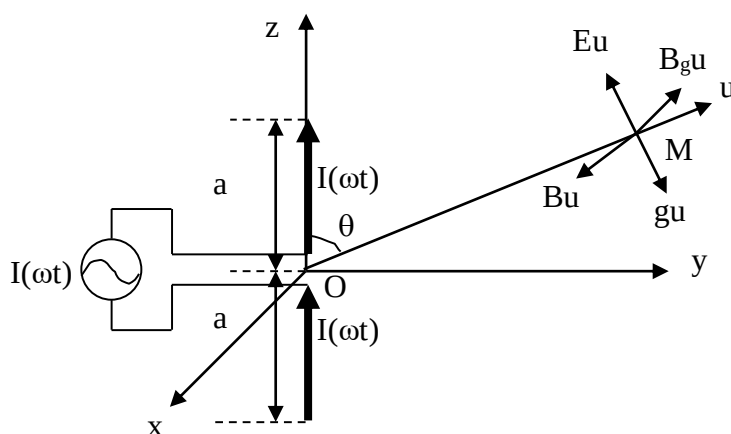
$$g = - \frac{\mu_0 \omega a \mathbf{m}_e \mu_g}{2\pi r q_e \mu_0} I_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) \mathbf{u}_\theta$$

Le champ g est le champ gravitationnel. Les champs gravitomagnétiques sont donc donnés :

$$B_g = - \frac{\mu_0 k a \mathbf{m}_e \mu_g}{2\pi r q_e \mu_0} I_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) \mathbf{u}_\phi$$

$$g = - \frac{\mu_0 \omega a \mathbf{m}_e \mu_g}{2\pi r q_e \mu_0} I_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) \mathbf{u}_\theta$$

La charge q_e est négative, il faut faire attention à l'orientation des champs. Le schéma suivant montre les champs électromagnétiques et les champs gravitomagnétiques.



Doublet de Hertz symétrisé

On peut comparer les grandeurs d'onde électromagnétique et celles d'onde gravitomagnétique, en divisant B_g par B et g par E, à partir des équations suivantes ;

Onde électromagnétique est donnée par ;

$$B = - \mu_0 \frac{kaI_0}{2\pi r} \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) u_\phi$$

$$E = - \mu_0 \frac{\omega a I_0}{2\pi r} \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) u_\theta$$

Onde gravitomagnétique est donnée par ;

$$B_g = - \mu_0 \frac{ka}{2\pi r} \frac{\underline{m_e} \cdot \underline{\mu_g}}{q_e \mu_0} I_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) u_\phi$$

$$g = - \mu_0 \frac{\omega a}{2\pi r} \frac{\underline{m_e} \cdot \underline{\mu_g}}{q_e \mu_0} I_0 \sin(\theta) \sin(\omega t - kr) u_\theta$$

Après la division, on trouve ;

$$\mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} \underline{m_e} & \cdot \underline{\mu_g} \\ q_e & \mu_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \underline{m_e} & \cdot \underline{\mu_g} \\ q_e & \mu_0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}$$

On rappelle que l'ensemble des équations de Maxwell et Faraday constitue une application linéaire additive et homogène. Comme les, champs électromagnétiques et gravitomagnétique sont liés par un scalaire et comme cette application est invariante par rapport à la multiplication par un scalaire (homogène), on peut donc affirmer que les ondes gravitomagnétiques sont aussi régies par les équations de Maxwell et Faraday dans le vide, tel que :

$$\text{div } g = 0$$

$$\text{div } B_g = 0$$

$$\text{rot } g = - \frac{\partial B_g}{\partial t}$$

$$\text{rot } B_g = \mu_g \epsilon_g \frac{\partial g}{\partial t}$$

Avec

$$\Delta g - \epsilon_g \mu_g \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta B_g - \epsilon_g \mu_g \frac{\partial^2 B_g}{\partial t^2} = 0$$

Les ondes gravitomagnétiques se propageant dans le vide à la célérité c tel que

$$c^2 \epsilon_g \mu_g = 1$$

Le champ gravitomagnétique transporte de l'énergie. La densité locale d'énergie gravitomagnétique U est :

$$U = \epsilon_g \frac{\|g\|^2}{2} + \frac{\|B_g\|^2}{2\mu_g} \quad , (\text{ kg/m}^1\text{s}^2)$$

Le courant d'énergie est donné par le vecteur de Poynting Π ;

$$\Pi = \frac{g \times B_g}{\mu} \quad , (\text{ kg/s}^4)$$

Induction gravitomagnétique

Le phénomène d'**induction gravitomagnétique** a pour résultat la production d'une différence de potentiel aux bornes d'un conducteur massique soumis à un champ gravitomagnétique variable. On appellera cette tension, force gravitomotrice.

L'induction gravitomagnétique est basée sur deux lois :

La Loi de Lenz (loi de modération)

- La [Loi de Maxwell - Faraday](#) qui donne le lien entre la f.g.m. (la force gravitomotrice) induite e_g et le flux Φ de B_g à travers le circuit massique est donnée par :

$$e_g = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{o} \quad \Phi = \iint_S B_g \cdot dS$$

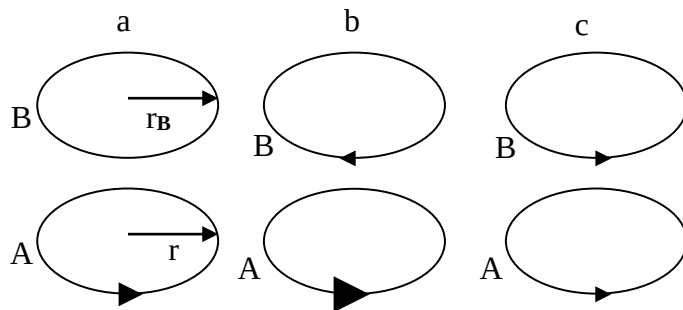
L'orientation de la surface S définissant celle de son contour, i.e. celle du circuit, donnant donc le sens de e_g .

La variation du flux du champ gravitomagnétique peut avoir deux causes (non mutuellement exclusives) :

Soit le circuit est soumis à un champ fixe mais on le déforme ou on l'oblige à tourner. On parle alors d'**induction de Lorentz**

Soit le circuit est immobile et l'intensité du champ gravitomagnétique varie ou tourne. On parle alors d'**induction de Neumann**.

Le schéma suivant montre le principe d'induction.



Le phénomène d'induction entre deux courants massiques (c, b et c) : lorsque la spire de courant A est parcourue par un courant stationnaire, elle n'induit pas de courant dans la spire B(a). Si, en revanche, le courant dans la spire A augmente, il induit un courant de sens opposé dans la spire b(b), et s'il diminue (c) il induit un courant dans le même sens B(c). Ceci est en accord avec le modèle publié par Maxwell en 1891 dans sa troisième édition du Treatise on Electricity and Magnetism.

Si ;

- m_A est la masse de la spire A
- m_B est la masse de la spire B
- v_A est la vitesse tangentielle de la spire A
- v_B est la vitesse tangentielle de la spire B
- I_A est le moment d'inertie de la spire A
- I_B est le moment d'inertie de la spire B
- ω_A est la pulsation de la spire A
- ω_B est la pulsation de la spire B
- $\omega = 2\pi \times \text{fréquence de rotation}$
- P la puissance fournie par un système extérieur.

En vertu du principe de la conservation d'énergie ;

$$P = m_A \cdot v_A \frac{dv_A}{dt} + m_B \cdot v_B \frac{dv_B}{dt} + \text{pertes (rayonnement)}$$

ou

$$P = I_A \cdot \omega_A \frac{d\omega_A}{dt} + I_A \cdot \omega_A \frac{d\omega_A}{dt} + \text{pertes (rayonnement)}$$

Remarque 4 : Une masse en accélération induit des courants massiques par le biais des masses qui l'entourent. Dans ce cas il faut tenir compte des masses au voisinage de la masse en accélération pour déterminer son accélération. On ne peut traiter un élément isolément de son contexte environnemental.

Remarque 5 : les ondes électromagnétiques sont indissociables aux ondes gravitomagnétiques dans le vide car les charges (électrons ou protons) qui l'engendrent sont massiques (ont une masse) par contre les ondes gravitomagnétiques peuvent exister indépendamment des ondes électromagnétiques.

La lumière n'est pas seulement composée d'onde électromagnétique, elle est composée aussi d'onde gravitomagnétique dû au déplacement de la masse des électrons.

Les ondes gravitomagnétiques agissent directement sur la masse par l'effet d'induction.

Energie électrogravitomagnétique

D'après la remarque 5, la lumière est composée d'onde électromagnétique et d'onde gravitomagnétique, on appellera cette onde, onde électrogravitomagnétique.

L'onde électrogravitomagnétique transporte de l'énergie. La densité locale d'énergie électrogravitomagnétique U est :

$$U = \epsilon_0 \frac{\|E\|^2}{2} + \frac{\|B\|^2}{2\mu_0} + \epsilon_g \frac{\|g\|^2}{2} + \frac{\|B_g\|^2}{2\mu_g} \quad , (\text{ kg/m}^1\text{s}^2)$$

Avec ;

$$\mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} \underline{m_e} & \underline{\mu_g} \\ \underline{q_e} & \underline{\mu_0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \underline{m_e} & \underline{\mu_g} \\ \underline{q_e} & \underline{\mu_0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}$$

Après substitution, on trouve ;

Equation électrogravitomagnétique

$$\mathbf{U} = \frac{\left[\epsilon_0 + \epsilon_g \left(\frac{\mathbf{m}_e \mathbf{u}_g}{q_e \mathbf{u}_0} \right)^2 \right]}{2} \|\mathbf{E}\|^2 + \frac{\left[\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_g} \left(\frac{\mathbf{m}_e \mathbf{u}_g}{q_e \mathbf{u}_0} \right)^2 \right]}{2} \|\mathbf{B}\|^2$$

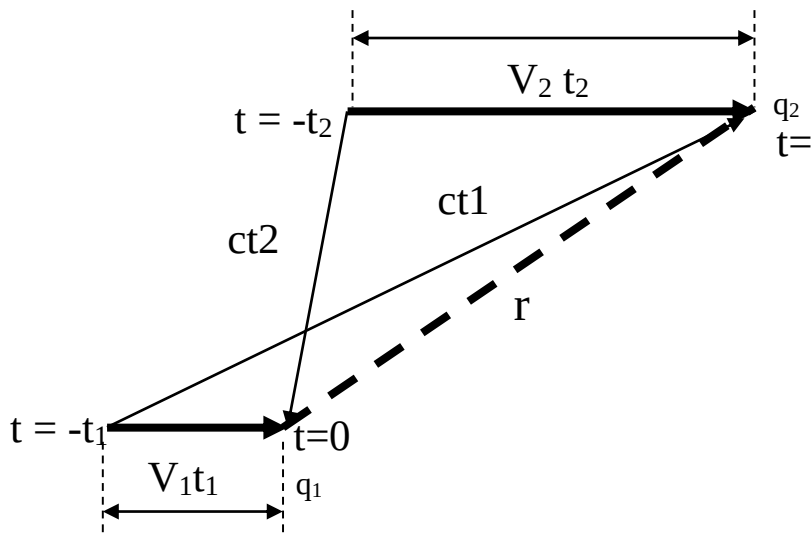
Constantes physiques

Nom	Symbole	Valeur	Origine
Constante de gravitation	G	$\approx 6.674 \times 10^{-11}$ $\text{m}^3/\text{kg}.\text{s}^2$	mesure
Vitesse d'interaction gravitationnelle dans le vide	c	$\approx 2.99 \times 10^8$ m/s	hypothèse
Permittivité du champ gravitationnelle	ϵ_g	$\approx 1.18 \times 10^9$ $\text{kg}.\text{s}^2/\text{m}^3$	$\epsilon_g = 1/4\pi G$
Perméabilité du champ gravitomagnétique	μ_g	$\approx 9.4 \times 10^{-27}$ m/kg	$c^2 \epsilon_g \mu_g = 1$
Impédance caractéristique du vide des ondes gravitomagnétiques	Z_g	$\approx 2.82 \times 10^{-18}$ $\text{m}^2/\text{kg}.\text{s}$	$\mu_g c$
Vitesse d'interaction électrique dans le vide	c	$\approx 2.99 \times 10^8$ m/s	mesure
Permittivité du champ électrique	ϵ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Kg}/\text{A}^2.\text{s}^2$	définition
Perméabilité du champ magnétique	μ_0	8.85×10^{-12} $\text{A}^2.\text{s}^2/\text{kg}.\text{m}$	$c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$
Impédance caractéristique du vide des ondes magnétiques	Z_0	376.7Ω	$\mu_0 c$
Charge élémentaire	q_e	$1.6 \times 10^{-19} \text{ A}.\text{s}$	mesure
Masse de l'électron	m_e	$9.1.9 \times 10^{-31} \text{ kg}$	mesure
Masse du proton	m_p	$1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$	mesure
Masse du neutron	m_n	$1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}$	mesure

Grandeurs Physiques

Nom	symbole	unités
Champ gravitationnel	g	m/s^2
Champ gravitomagnétique	B_g	s^{-1}
Champ électrique	E	
Champ mgnétique	B	

Retard spatio-temporel



Soit deux particules chargées q_1 et q_2 à la date $t = 0$ se déplaçant parallèlement à la vitesse v_1 et v_2 respectivement, Séparées par une distance r . Par effet fossile, la force exercée sur q_1 par q_2 est la force qui a été engendrée par q_2 à la date $t = -t_2$ quand celle-ci occupait son ancienne position et la force exercée sur q_2 par q_1 est la force qui a été engendrée par q_1 à la date $t = -t_1$ quand celle-ci occupait son ancienne position. Dans le modèle mathématique classique, on considère, à la date $t = 0$, r comme la distance qui sépare les deux particules mais ceci ne correspond à la réalité physique. La transformation de Lorentz corrige ce décalage spatio-temporel en faisant apparaître le champ magnétique et le champ gravitomagnétique. Il faudrait rajouter l'Effet Doppler pour compléter la description avec plus de précision.

On ne regarde jamais une émission à la télévision en direct mais en différé car le présent n'est pas encore arrivé.

31 octobre 2005
Joseph Wathuta Nduriri.